数理解析研究所講究録
174巻 1973年 164-185

拡散効果をもつボルテラ方程式について

甲南大 理　三村 昌泰

§1　序論

"生物は絶えず変化しながら生きている。" このわずか一行の言葉を数学的に記述することがいかに困難なことか！古くから，多くの生物学者，物理学者，それに数学者はこの問題にattackしてきたが，いまだ明快な解答を与えていない。生物が変化する理由としてはいくつかの種が食ったり，食われたりする，いわゆる他の種との相互作用（interaction）と与えられた環境との相互作用から生じるものと思われる。そこでこの相互作用の機構（mechanism）を解明することが本質的な問題となっている。　ここでは前者の意味での相互作用は無視して，ただ一種からなる生物群集が孤立して，ある与えられた環境のもとで生活している場合について考えることにしよう。

1795年　マルサスは「人口は時間と共に幾何数列的に

増加する」と述べている。すなわち数学的に表現すれば次のようになる。 いま $N(t)$ を時刻 t における個体数とすれば，上の言葉は

$$N(t)=N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$$

と表現できる。つまり，上式は次の線型常微分方程式の初期値問題の解である

$$(1\text{-}1) \qquad \frac{dN}{dt}=\varepsilon N \quad , \quad N(t_0)=N_0$$

ここで ε は生物群集の増殖率であり、あらかじめ与えられている。しかし ε を定数と考えるならば、(1-1) 式が局所的にしか成立しないであろうことは容易に推察される。そこで 1925年 ボルテラは ε を N の函数として考え、フィードバック効果を導入した。すなわち

$$(1\text{-}2) \qquad \frac{dN}{dt}=\varepsilon(N)N \qquad N(t_0)=N_0$$

のような非線型常微分方程式で大域的な生態系を記述しようとした。この考え方は一種でなく、数種からなる生物群集の生態系につ

適用できて 興味ある結果を

いても彼はだしている。(参照[3]) しかしながら、ここでは空間に関して一様であるという特殊な場合を想定している。これを取り除こうとしたのが、カーカルディーとカーナーであった。(1958, 1959年) 彼等はボルテラの方程式に拡散効果を導入したのである。簡単にこの経過を説明しよう。表面積Sをもつある体積Vにおいて、$N(t,x)$を時刻t、場所xにおける個体数とする。ここで次式のような連続式を与える。

$$(1\text{-}3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_V N(t,x)\,dx = \int_S \mathbf{j}(t,x)(-\mathfrak{n})\,dS + \int_V \varepsilon(N)N\,dx$$

ここで、ベクトル$\mathbf{j}(t,x)$は時刻tで単位時間にΔSという微小面積を通過する個体数であり、$\mathfrak{n}$はΔSに対する外向き法線ベクトルである。(1-3)にグリーンの公式を適用すれば、

$$(1\text{-}4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}N(t,x) = -\mathrm{div}\,\mathbf{j}(t,x) + \varepsilon(N)N$$

を得る。ここで体積Vに出入する量は生物群集のランダム運動によるという強い(余り現実的でない!)仮定を置くと、$\mathbf{j}(t,x)$は次式で与えられる。

(1-5) $$\mathbf{j} = -\lambda(t,x,N)\nabla N$$

ここで $\lambda(t,x,N)$ は拡散係数とする。そこで (1-4) と (1-5) 式から次のような非線型拡散方程式が得られる

(1-6) $$\frac{\partial}{\partial t}N = \mathrm{div}(\lambda(t,x,N)\nabla N) + \varepsilon(N)N$$

附加条件としては

(1-7) $$N(0,x) = N_I(x) \quad \text{in } x \in (V+S)$$

(1-8) $$B[N(t,x)] = N_B(t) \quad \text{in } x \in S,\ t \in [0,\infty)$$

である。

ここで $B[\cdot]$ は境界上の作用素とする。以上の事より，微分方程式の混合問題が設定できる。この問題の解の存在，一意性，ならびに解の性質を一般の形で議論することは非常にむつかしいので，さらに非現実的な仮定（しかし定性的な性質は残して）を置く．すなわち，$\lambda(t,x,N)$ は定数とし，$B[N(t,x)] = N(t,x)$，$N_B(t) \equiv 0$ とする。この時，(1-6)～(1-8) 式は次のような半線形拡散方程式の第一種混合問題となる。

$$(1\text{-}9) \qquad \frac{\partial}{\partial t}N = \lambda \Delta N + \varepsilon(N)N$$

$$(1\text{-}10) \qquad N(0,x) = N_I(x) \qquad x \in (V+S)$$

$$(1\text{-}11) \qquad N(t,x) = 0 \qquad x \in S \,,\; t \in [0,\infty)$$

空間2次元の場合、条件(1-11)はある生物群集が広い海に浮かぶ孤島に住んでいると想像すればよいであろう。次に $\varepsilon(N)$ に対する仮定を置こう

$$(A\text{-}1) \qquad \varepsilon(N) \in C^1[0,\infty)$$

$$(A\text{-}2) \qquad \varepsilon(1) = 0 , \qquad \varepsilon(N) \geq 0 \quad \text{for } N \in [0,1]$$

$$\varepsilon(N) \leq 0 \quad \text{for } N \in [1,\infty)$$

ここで我々が解こうとしている問題を設定すると次のようになる。

(P-1) ボルテラの方程式と，拡散効果をもつボルテラ方

程式の間に定性的な相違点があるか？

(P-2)　(1-9)～(1-11)において、解の定性的性質が、拡散係数λと領域Vにどのように依存するか？

以上の2つの問題を考察するために、差分法を導入する。この理由としては、もしも問題(1-9)～(1-11)を解析的に解く事が困難であるならば、有効（安定かつ収束する）な差分法を考えるならば、電子計算機等を使用して数値的（近似的）に解けるからである。この近似解を観察することは問題(P-1),(P-2)に対するある意味での解答を与えるであろう。ここで安定な一つの差分方程式を紹介しよう

定理1.　(A-1)と(A-2)のもとに、混合問題(1-9)～(1-11)に対して次式で与えられる差分問題を考える。

(1-12)
$$\frac{N^{n+1,j}-N^{n,j}}{k}=\lambda\Delta_h^3 N^{n,j}+\varepsilon(N^{n,j})N^{n,j}-S(N^{n,j})(N^{n+1,j}-N^{n,j})\qquad (nk,jh)\in[0,\infty)\times V_h.$$

(1-13)
$$N^{0,j}=N_I(j_1h,j_2h,j_3h)\qquad jh\in(V_h+S_h)$$

(1-14) $$N^{n,\tilde{j}} = 0 \qquad (nk, \tilde{j}h) \in [0, \infty) \times S_h$$

この時，もしも $0 \leq N_I(x) \leq 1$ であれば，差分解 $N^{n,j}$ は，任意の n，j に対して次の意味で安定である．

$$0 \leq N^{n,j} \leq 1$$

ただし，$\Delta_h^3 N^{n,j} = \sum_{\ell=1}^{3} (N^{n,j+I_\ell} - 2N^{n,j} + N^{n,j-I_\ell})/h^2$，$h$ と k はそれぞれ，x，t 方向への格子間隔である。h と k は次式を満している

(1-15) $$0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{6}$$

ここで，V_h，S_h は次のように定義しよう．

$$D_h = \{ jh \mid \quad jh \in V \}$$

$S_h = \{ \tilde{j}h \mid \tilde{j}h$ のまわりの格子点のいずれかが V に入っている$\}$

$S(N^{n,j})$ は人工項であり，nk を固定して $n \to \infty$ とした時に $S(N^{n,j})(N^{n+1,j} - N^{n,j})$ は零に tend する項である。いまは

(1-16) $$S(u) = \frac{\varepsilon(u)u}{1-u}$$

としておく。

(証明)　(1-12) 式より

$$N^{n+1,j} = \frac{P_\lambda(N^{n,j}) + k\{\varepsilon(N^{n,j})N^{n,j} + S(N^{n,j})N^{n,j}\}}{1 + kS(N^{n,j})}$$

(1-17)
$$= \frac{P_\lambda(N^{n,j}) + kS(N^{n,j})}{1 + kS(N^{n,j})}$$

を得る。ここで

$$P_\lambda^j(N^{n,j}) = N^{n,j} + k\lambda\Delta_h^j N^{n,j}$$

である。(1-15) より　$0 \leq N^{n,j} \leq 1$ であれば、(1-17) 式より容易に　$0 \leq N^{n+1,j} \leq 1$ が導かれるから、数学的帰納法で定理1は簡単に証明できる。

(注意) 問題 (1-9)〜(1-11) の解が一意であれば、差分解が $n \to \infty$ $(k, h \to 0)$ の時微分方程式の解に収束することも証明できる（参照 [6]）

§2. 漸近挙動 1.

ここでは $\varepsilon(N)$ にもう少し強い条件を加えることによって差分解の漸近挙動（h, k を固定して、$n \to \infty$）を調べることにする

(A-3) $\qquad \mathcal{E}'(N) \leq 0 \qquad N \in [0, \infty)$

話を簡単にするために、空間を一次元、かつ区間 $[0, \pi]$ とし、$\lambda = 1$ とする。この時 (1-9)～(1-11) は次のようになる。

(2-1) $$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \mu \mathcal{E}(N) N$$

(2-2) $$N(0, x) = N_I(x)$$

(2-3) $$N(t, 0) = N(t, \pi) = 0$$

上式に対して (1-12) のような差分近似を行うが、ここでは人工項 $S(N)$ を正の定数としておく。

(2-4) $$\frac{N^{n+1,j} - N^{n,j}}{k} = \Delta'_h N^{n,j} + \mu \mathcal{E}(N^{n,j}) N^{n,j} - S(N^{n+1,j} - N^{n,j})$$

(2-5) $$N^{0,j} = N_I(jh)$$

(2-6) $$N^{n,0} = N^{n,J} = 0$$

ここで、$j \in \langle 0, J \rangle = \{0, 1, 2, \cdots, J = (\pi/h)\}$、$n \in \langle 0, \infty \rangle$ とする。

補助定理 1.（安定性）

もしも $^{\forall}j \in <0, J>$ に対して $C \geq N^{0.j} \geq 0$ であれば，$^{\forall}n \in <1, \infty>$ と $^{\forall}j \in <1, J-1>$ に対して

$$C \geq N^{n.j} \geq 0$$

が成立する。ここで，$C \geq C_0$，$C_0 = max(1, \max_x N_0(x))$

（証明）(2-4) 式から

$$(2\text{-}7) \qquad N^{n+1.j} = \frac{P_1'(N^{n.j}) + k\{\mu\varepsilon(N^{n.j}) + S\}N^{n.j}}{1 + kS}$$

を得る。ここで $S \geq -\varepsilon(C)\mu$ とおけば，$N^{n.j} \geq 0$ から $N^{n+1.j} \geq 0$ は明らかである。又上式の両から C を引くと，

$$N^{n+1.j} - C = \frac{P_1'(N^{n.j} - C) + k\{\mu\varepsilon(N^{n.j})N^{n.j} + S(N^{n.j} - C)\}}{1 + kS}$$

を得るから

$$\leqq \frac{P_1'(N^{n.j} - C) + k(N^{n.j} - C)\{-\mu\varepsilon_0(N^{n.j}) + S\}}{1 + kS}$$

が導かれる。ここで $\varepsilon(u)u = (1-u)\varepsilon_0(u)$ とする。そこで $S \geq \max_{0 \leq u \leq C} \mu\varepsilon_0(u)$ と S を選べば，$N^{n.j} \leq C$ より

$N^{n+1,j} \leq C$ が導かれる。 すなわち S を

$$S \geqq S_0 = \max\left(-\mathcal{E}(C)\mu,\ \max_{0\leq u\leq C} \mathcal{E}_0(u) \right)$$

を満すように選ぶと，補助定理１は証明できる。

補助定理２ (単調性)

もしも $\forall j \in \langle 0, J \rangle$ に対して，$N^{n,j} \gtrless N^{n-1,j}$ であれば，
$N^{n+1,j} \gtrless N^{n,j}$ が成立する。

(証明)　　(2.7)式より

$$N^{n+1,j} - N^{n,j} = \frac{1}{1+kS}\Big\{ P_1'(N^{n,j} - N^{n-1,j}) + k\Big[$$

$$\mu\{ \mathcal{E}(N^{n,j})N^{n,j} - \mathcal{E}(N^{n-1,j})N^{n-1,j}\} + S(N^{n,j} - N^{n-1,j})\Big\}$$

を得る。 ここで，　$S \geqq S_1 = \max\left(S_0,\ \max_{0\leq u\leq C} |(\mathcal{E}(u)u)'| \right)$ と
なるように選ぶと，補助定理２は証明できる。

補助定理３．(保順序)

もしも $\forall j \in \langle 0, J \rangle$ に対して，$N^{0,j} \gtrless \tilde{N}^{0,j}$ であれば，
$\forall n \in \langle 1, N \rangle$，$\forall j \in \langle 0, J \rangle$ に対して

$$N^{n,j} \gtrless \tilde{N}^{n,j}$$

である。 ここで，$\tilde{N}^{n,j}$は初期値$\tilde{N}^{0,j}$をもつ(2-4)〜(2-6)の差分解である。

(証明) 補助定理1,2とまったく同じ手段で証明できるのでここでは省略する。

補助定理4.

次式で与えられる線型常微分方程式の固有値問題を考える。

$$(2\text{-}8)\quad \begin{cases} -\Delta_h' \varphi^j = \lambda_l \varphi^j \\ \varphi^0 = \varphi^J = 0 \end{cases}$$

この時，$\lambda_l = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{lh}{2}\right)$が固有値となる固有函数は

$$(2\text{-}9)\qquad \sin(ljh)$$

で与えられる。

(証明) 参照[6]の4.3節

補助定理5.

もしもμが $0 \leq \mu E(0) \leq \lambda_1$ を満すならば，初期値 $N^{0,j} = a \sin jh$ （$\forall a > 0$）をもつ解$N^{n,j}$はnに関して単調減少列である。

（証明） 補助定理3．より $\forall j \in \langle 1, J-1 \rangle$ に対して $N^{1,j} \leq N^{0,j} = a \sin jh$ が成立することを云えばよい．

$$N^{1,j} - N^{0,j} = \frac{1}{1+kS}\{P_1'(N^{0,j}) + k\{\mu E(N^{0,j}) + S\}N^{0,j}\} - N^{0,j}$$

$$= \frac{k\Delta_h' N^{0,j} + k\mu E(N^{0,j}) N^{0,j}}{1+kS}$$

(2-8) 式より

$$= \frac{-k\lambda_1 N^{0,j} + k\mu E(N^{0,j}) N^{0,j}}{1+kS}$$

$$\leq \frac{-kN^{0,j}(\lambda_1 - \mu E(0))}{1+kS} \leq 0$$

よって証明終り。

補助定理6.

次式で与えられる非線型常微分方程式の固有値問題を考

える。

$$(2\text{-}10)\qquad \begin{cases} -\Delta_h^1 \psi^j = \mu\,\varepsilon(\psi^j)\,\psi^j \\ \psi^0 = \psi^J = 0 \end{cases}$$

この時、もしも μ が $0 \le \mu\varepsilon(0) \le \lambda_1$ を満すならば、(2-10)式の非負解は $\psi^j \equiv 0$ だけである。

(証明) 参照[8]

定理1.

μ は $0 \le \mu\varepsilon(0) \le \lambda_1$ を満すものとする。人工項 $S(\ge S_1)$ を適当に固定するならば、(2-4)〜(2-6)の差分解 $N^{n,j}$ は、任意の非負の初期値に対して

$$\lim_{n\to\infty} N^{n,j} = 0$$

となる。

(証明) 第一段階として、初期値が $a \sin jh$ の形である場合には、補助定理5,6より定理1が成立することがわかる。第二段階として、任意の初期値 $N^{0,j}$ に対しては、$\forall j \in \langle 1, J \rangle$ に対して、

$$\bar{a}\sin jh \geq N^{0.j} \geq \underline{a}\sin jh$$

となるように $\bar{a}$, $\underline{a}$ を選ぶことができる。いまそれぞれを初期値にもつ差分解を、$\bar{N}^{n.j}$, $N^{n.j}$, $\underline{N}^{n.j}$ とすれば、補助定理3、より

$$\bar{N}^{n.j} \geq N^{n.j} \geq \underline{N}^{n.j}$$

となる。そこで 第一項、第三項は $n\to\infty$ の時 零に近づくから

$$\lim_{n\to\infty} N^{n.j} = 0$$

は証明できる。

(注意)

この定理は境界条件 (2-6) のもとで、増殖率の係数 μ がある値より小さければ、その生物群集は時間が経つにつれて絶滅していくことを示している。

補助定理7.

もしも μ が $\lambda_1 < \mu E(0)$ を満すならば、初期値 $N^{0.j} = \delta \sin jh$ ($^\forall \delta \leq \delta_0$) をもつ解 $N^{n.j}$ は n に関して単調増大列である。ただし δ_0 は $\mu E(N) = \lambda_1$ の根である。

(証明) 補助定理5と同様で，$N^{1,\delta} \geq N^{0,\delta}$ を証明すれば十分である。

$$N^{1,\delta} - N^{0,\delta} = \frac{-k\lambda_1 N^{0,\delta} + k\mu\varepsilon(N^{0,\delta})N^{0,\delta}}{1+kS}$$

であるから

$$= \frac{-kN^{0,\delta}(\lambda_1 - \mu\varepsilon(N^{0,\delta}))}{1+kS} \geq 0$$

となる。

補助定理8.

(2-10) 式において，もしも μ が $\lambda_1 < \mu\varepsilon(0)$ を満たすならば，非負で恒等的に零でない解 ψ^{δ} が唯一つ存在する。

(証明) 参照 [8]

補助定理9.

μ は $\lambda_1 < \mu\varepsilon(0)$ を満たすものとする。初期値 $N^{0,\delta}$ が

$$N^{0,\delta} = \delta \sinh \quad (\delta_0 \geq \delta)$$

で与えられるならば，

$$\lim_{n\to\infty} N^{n,\delta} = \psi^{\delta}$$

である。

(証明) 補助定理7,8 から明らかである。

補助定理10.

もしも初期値 $N^{0,j}$ が $N^{0,j}=c\psi^{j}$ で与えられるならば，$c>(<)1$ の時，解 $N^{n,j}$ は n に関して単調減少(増大)列である。

(証明)

$$N^{1,j}-N^{0,j}=\frac{k\Delta'_{h}N^{0,j}+k\mu\varepsilon(N^{0,j})N^{0,j}}{1+kS}$$

$$=\frac{-kc\Delta'_{h}\psi^{j}+k\mu c\varepsilon(c\psi^{j})\psi^{j}}{1+kS}$$

$$=\frac{-k\mu c\varepsilon(\psi^{j})\psi^{j}+k\mu c\varepsilon(c\psi^{j})\psi^{j}}{1+kS}$$

$$=\frac{\mu kc\psi^{j}\{\varepsilon(c\psi^{j})-\varepsilon(\psi^{j})\}}{1+kS}$$

故に，$\varepsilon(N)$ の単調減少性より証明は明らかである。

定理２.

μ は $\lambda_1 < \mu E(0)$ を満たすものとする。人工項 $s(\geq s_1)$ を適当に固定するならば、(2-4)〜(2-6) の差分解 $N^{n,j}$ は任意の恒等的に零でない非負の初期値に対して

$$\lim_{n\to\infty} N^{n,j} = \varphi^{j}$$

(証明) 証明方法は定理１. の場合と同様に、差分方程式の保順序性を使えばよい。問題となるのは初期時刻において、$N^{0,j}$ を下からおさえる $\delta_1 \sin jh$ というものがない場合であるが、((0, π) で compact support な初期値) この場合は適当な時間が経ったのちに

$$N^{0,j} \geq \delta_2 \sin jh$$

とできる事がわかっている(*)から大した問題にはならない。そこでここでは証明を省く。

(*) 熱方程式 $u_t = u_{xx}$ の解の性質より

§3. 漸近挙動２.

定理１, ２からわかるように、もしも (A-3) を仮定するならば、初期値の大きさに無関係に $\mu E(0)$ の大きさによって解の漸近挙動を決定することができた（これを Global stability という）が、(A-3) を満たさない $E(N)$ について Global stability が成立するかどうかはまだ厳密にわかっていない。ここではそれについて考える。この時§1 でのべた意味で、差分近似が有効となる。このために、$\varepsilon(N)$ は次のような函数として話を進めていく。

$$\varepsilon(N) = N(1-N)$$

(注意)

当然、(A-3) は満たされていない。

定理3、

μ は $0 \leq \mu \leq 4\lambda_1$[*] を満たすものとする。この時、任意の非負の初期値に対して、(2-4)~(2-6) の差分解 $N^{n,j}$ は

$$\lim_{n\to\infty} N^{n,j} = 0$$

である。 (*) $4\lambda_1 \geq \mu$ は $\lambda_1 \geq \mu \max_u \varepsilon'(u)$ と同値である。

(証明) この証明はほとんど定理1の場合と同様である。ここでは省略する。

定理3は global stability を主張する定理である。次に考えるのは $4\lambda_1 < \mu$ の場合であるが、この場合はいささか

むつかしい.

定理4、

μは $4\lambda_1 < \mu$ を満たすものとする。この時

(3-1) $$0 < N^{0,\delta} \le N^*$$

を満たす任意の初期値に対して 差分解 $N^{n,\delta}$は

$$\lim_{n\to\infty} N^{n,\delta} = 0$$

である。ここで N^* は $\mu N(1-N) = \lambda_1$ の最小解とする。

(証明) 省略.

以上までが厳密な話である。すなわち $4\lambda_1 < \mu$ を満たす μに対して, (3-1) が成立しない初期値 については rigorous な話はないのである。
をもつ解の漸近挙動

そこで、次のような数値実験を行う.

$h = \pi/100$, $k = 0.0004$,

$\mu = 6$ $(>4\lambda_1)$.

この時 $N^* \doteqdot \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \doteqdot 0.21$ であるから,

151

$$N_1^{0,j} = 0.3 \sin jh$$

について計算を行った（ FACOM 230-60 ）。この時 $n \fallingdotseq 760$ で $N^{n,j}$ は

$$(3\text{-}2) \quad \begin{cases} -\Delta_h' \varphi^j = b(\varphi^j)^2(1-\varphi^j) \\ \varphi^0 = \varphi^J = 0 \end{cases}$$

をみたす一つの恒等的に零でない解 φ^j に近づくことがわかった。又 $N^{0,j} \geqq N_1^{0,j}$ の初期値に対しても 誤差 (10^{-5}) の意味において $N^{n,j}$ は同じ解 φ^j に近づくこともわかった。
問題となるのは

(P-3) (3.2) の解は何個あるか？

(P-4) $N^{0,j}$ の stability region は決定できるか.

である。数値実験によると，(P-3) の答は 1 個である。
(P-4) の答はまだわからない。ということである。

以上でこの報告を終ることにする。なお，この他，拡散効果をもつボルテラ方程式についての数値実験は色々行ったので，興味のある方にはお見せいたしますからお知らせ下さい。

参考文献

[1] Kirkaldy, J. S.: Can. J. Phys. 36, 899-906 (1958)

[2] Kerner, E. H.: Bull. Math. Biophysics. 21, 217-255 (1959)

[3] Volterra, V.: Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauther-Villars. (1931)

[4] Mimura, M. et al.: Proc. of Japan Academy. 47, no. 4, 385-387 (1971)

[5] Mimura, M.: Computation and Analysis. 3, no. 3, 26-32 (1971)

[6] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R.: Finite-difference methods for partial differential equations. New York. London: John Wiley and sons, Inc. (1960)

[7] Kametaka, Y.: 飽和と成長を伴なう拡散現象 (to appear)

[8] Parter, S. V.: Numer. Math. 7, 113-128 (1965)